Cours du 08.03.2021 MATIN

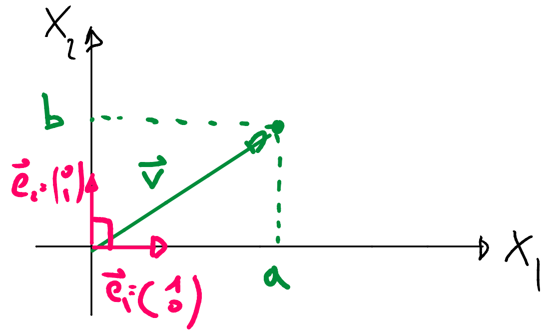
lundi, 8 mars 2021 10:17

Au premier semestre nous avions vu qu'un nombre (entier ou pas !) quelconque peut s'écrire dans une "autre" base que la base 10 !

Notion de "base par défaut" qui est la base 10, et on peut sans autre en utiliser une autre !

$$(10)_{10} = (1010)_2 \quad (2^1\ 2^0)$$

On a aussi une notion de "base" dans l'espace vectoriel "standard". Dans le plan "cartésien" on va écrire les coordonnées d'un point comme un vecteur



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Avec la notion de "combinaison linéaire", chaque vecteur peut être écrit comme une combinaison linéaire d'autres vecteurs.

En utilisant les vecteurs "standard" $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, nous pouvons écrire notre vecteur

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= a \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \vec{e}_2$$

Nos deux vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ nous permettent de "décrire" TOUS les vecteurs à 2 dimensions.

Nos deux vecteurs e_1 et e_2 nous permettent de décrire TOUS les vecteurs à 2 dimensions.
Le couple $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ est appelé BASE génératrice.

La base standard en N dimension est définie par N vecteurs élémentaires est appelée la BASE CANONIQUE de $\mathbb{R}^N$

$$\mathcal{B}^N = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_N\}$$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \vec{e}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ où la $i^{\text{ème}}$ ligne de $\vec{e}_i$ est 1
le reste est 0 !

Exemple : N=5 dimensions, que vaut $\vec{e}_4 = ?$

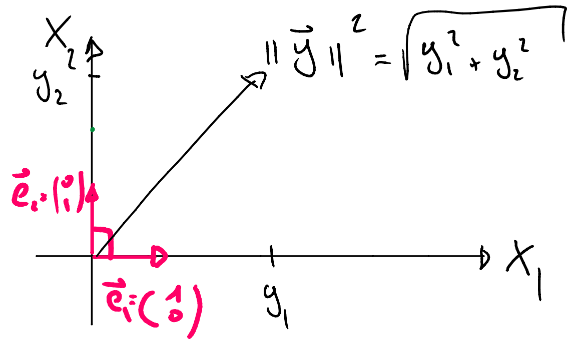
$$\underbrace{\vec{e}_4}_{} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underbrace{4^e}_{} \text{ ligne} = 1$$

$\mathcal{B}^N = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_N\}$ Est une base dite "orthonormée",

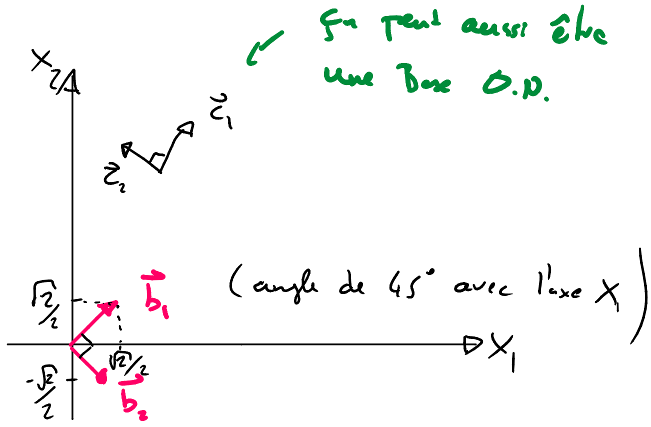
Ortho => car tous les vecteurs sont ORTHOGONNAUX entre eux (à angle droit, angle à 90°= $\frac{\pi}{2}$).
Normé => la norme de chaque vecteur de la base vaut 1 !

$$\|\vec{e}_i\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + \dots + \underbrace{1^2}_{i^{\text{ème}} \text{ composante}} + 0^2 + \dots + 0^2} = \sqrt{1^2} = 1$$

Une base orthonormée pour une espace à N dimensions est un ensemble de N vecteurs, orthogonaux entre eux et de longueur 1.



BASE CANONIQUE



$B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ est aussi orthonormé !

Si $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$

$$\|\vec{b}_1\| = 1 = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \cdot a$$

ORTHONORMÉ !

$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

Il existe en fait une infinité de bases orthonormées !!!

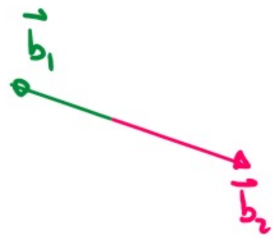
Si on a une base qui n'est PAS orthonormée !!!
Il faut faire TRES attention au calcul de la norme !!!

$$\vec{y} = 3 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} \qquad \|\vec{y}\| \cancel{=} \sqrt{3^2 + 1^2}$$

$$\begin{cases} \|\vec{a}\| = 2 \\ \|\vec{b}\| = 1 \end{cases}$$

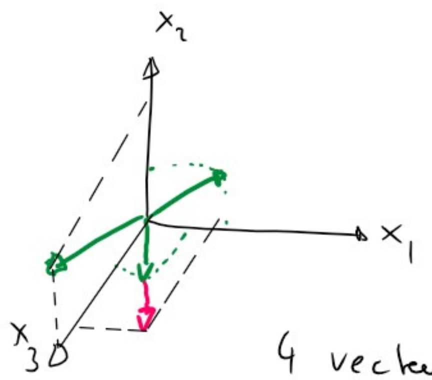
$\vec{y} = 3\,\vec{e}_1 + 1\cdot\vec{e}_2$ $\quad\quad$ $\|\vec{y}\| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

Question : peut-on avoir une base qui n'est pas "orthogonale" ?
Oui c'est possible, mais dans quelle conditions ?



Ici, toute combinaison linéaire des deux vecteurs se trouve sur la même droite!
Ce n'est donc PAS une base génératrice du plan !!!

La définition généralisée d'une base de $\mathbb{R}^N$ est un ensemble d'au moins N vecteurs NON-colinéaires.
Il peut y avoir plus que N vecteurs dans une base génératrice !
Ils peut y avoir plusieurs vecteurs colinéaires dans la base (MAIS il en faut AU MOINS N non-colinéaires) !



4 vecteurs dont 2 sont colinéaires.
c'est tout de même une base génératrice de $\mathbb{R}^3$!

Une base génératrice MINIMALE de $\mathbb{R}^N$ est composée de EXACTEMENT N vecteurs !

Si une base B est une base génératrice, la base canonique s'écrit E

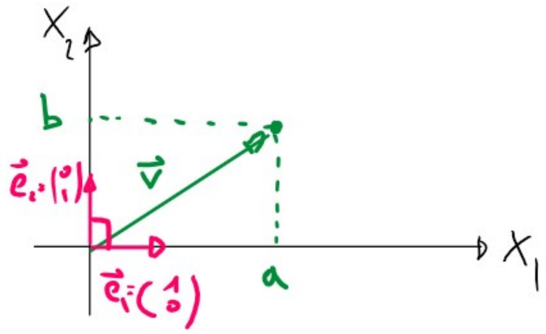
$E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_N\}$ $\quad\quad$ $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_N\}$

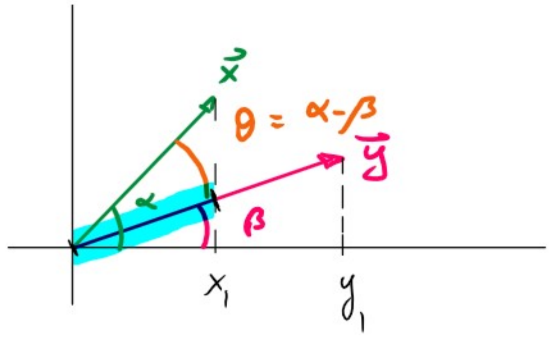
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_N \end{pmatrix}_B$$

$$= \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots = \mu_1 \vec{b}_1 + \mu_2 \vec{b}_2 + \dots$$

Et si les vecteurs ne sont PAS orthogonaux ?

⚠ $\vec{x}$ et $\vec{y} \neq \vec{0}$!





qu'est-ce que ça vaut ?

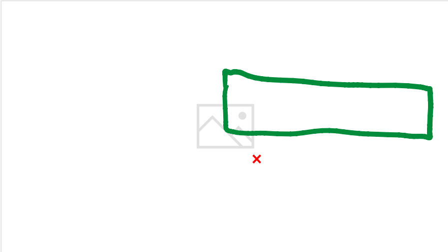
$$\cos(\alpha) = \frac{x_1}{\|\vec{x}\|} \qquad \sin(\alpha) = \frac{x_2}{\|\vec{x}\|}$$

$$\cos(\beta) = \frac{y_1}{\|\vec{y}\|} \qquad \sin(\beta) = \frac{y_2}{\|\vec{y}\|}$$

Qu'en est-il de l'angle ENTRE les deux vecteurs ??? $\theta = \alpha - \beta$

C.f. la bible de tout scientifique romand : la TABLE CRM !

$$\cos(\theta) = \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$



$$= \frac{x_1}{\|\vec{x}\|}\cdot\frac{y_1}{\|\vec{y}\|} + \frac{x_2}{\|\vec{x}\|}\cdot\frac{y_2}{\|\vec{y}\|}$$

$$= \frac{x_1\cdot y_1 + x_2\cdot y_2}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}$$

Calcul de l'angle entre deux vecteurs !

$$\boxed{\theta = \operatorname{Arccos}\left(\frac{x_1\cdot y_1 + x_2\cdot y_2}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}\right)}$$

Si $\theta = 0$, π $\Rightarrow \cos(\theta) = \cos(0) = 1 = \dfrac{x_1\cdot y_1 + x_2\cdot y_2}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}$

$\cos(\pi) = -1$

Si $x_1 y_1 + x_2 y_2 = \pm\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$ alors $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont COLINEAIRES

Si $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ $\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 = \dfrac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\underbrace{\|\vec{x}\|}_{>0}\cdot\underbrace{\|\vec{y}\|}_{>0}}\Big\} > 0$

⚠ Calculer un angle entre vecteur et le vecteur $\vec{0}$ n'a AUCUN sens, car $\vec{0}$ a toutes les directions (et aucune) à la fois ! Car il y a une division par 0 pour le calcul de l'angle !

Si $\theta = \pm\frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$!

Si $\theta = \pm \frac{\pi}{2} \iff \underbrace{x_1 y_1 + x_2 y_2}_{} = 0$!

(angle DROIT)

$\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \longmapsto x_1 y_1 + x_2 y_2$

PRODUIT SCALAIRE de deux vecteurs !

$\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \longmapsto x_1 y_1 + x_2 y_2$

⚠ A ne PAS confondre avec la MULTIPLICATION par un scalaire ! $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Nom	Notation	Paramètres	Résultat	
Multiplication par un scalaire	$\lambda \cdot \vec{x}$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	— vecteur $\lambda \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$
Produit scalaire	$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ $(\vec{x} \cdot \vec{y})$	$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}$ $x_1 y_1 + x_2 y_2$	— scalaire

Calcul de l'angle entre deux vecteurs :

$$\theta = \mathrm{Arcos}\left(\frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \right)$$

Dans $\mathbb{R}^N$: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_N y_N = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot y_i$

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \Rightarrow$ ils sont à angle DROIT

$\pm 1 \Rightarrow$ ils sont de même direction